Auf den ersten Blick verschlungen, auf den zweiten voller unerwarteter Symmetrie: Die Mathematik der Klänge erklärt uns, was wir schön finden. Foto Dieter Rüchel

Die Wurzeln des Wohllauts

Welche Töne harmonieren, welche klingen schräg? Musikmathematiker glauben, endlich eine objektive Antwort gefunden zu haben. Ist das der Weg zu neuen, unerhörten Tonwelten?

VON BENEDIKT STEGEMANN

Sie räumt dem Rettungswagen den Weg frei, sorgt bei Karnevalssitzungen für Stimmung und kommt dem Sänger von Wander- oder Jagdliedern meist als erstes über die Lippen: Die fünf Halbtöne überspannende Quarte ist ein nützliches Alltagsintervall. Kaum zu glauben, daß man sich seit dem Mittelalter ihretwegen streitet. Und das mittlerweile auf einem Niveau, dem nicht jeder Musikschüler auf Anhieb folgen dürfte.

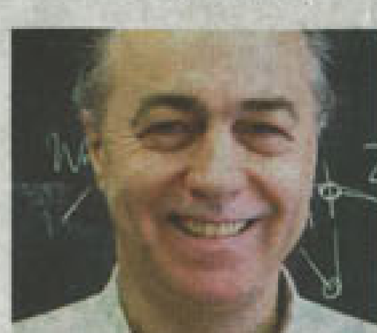
Schon in der Antike hatte sich Pythagoras Gedanken über die Eigenschaften von Tonpaaren, also Intervallen, gemacht. Dazu teilte der Mann aus Samos die Saite seines Monochords mit Hilfe eines beweglichen Steges. Halbierte er damit die Länge der schwingenden Saite, so erklang die Oktave des Grundtones, teilte er die Saite im Verhältnis zwei zu drei, ergab sich eine Quint, beim Verhältnis drei zu vier eine Quart. Als perfekt konsonant, also besonders gut klingend, ließ die pythagoreische Schule nur diese drei „reinen" Intervalle gelten, deren Schwingungsverhältnisse sich mit den Zahlen eins bis vier darstellen lassen. Als dissonant galt dagegen der Zusammenklang von Intervallen wie der kleinen Sekund mit ihrem Schwingungsverhältnis von 15 zu 16.

Nicht zuletzt aus theologischen Erwägungen heraus wurde dieses Modell später von der mittelalterlichen Musiktheorie übernommen, welche Terzen und Sexten bestenfalls als imperfekte Konsonanzen durchgehen ließ. Ein Traktat aus dem 13. Jahrhundert sortiert die kleine Sexte gar bei den perfekten Dissonanzen ein. Tiefer kann ein Intervall nicht sinken.

Als dennoch im ausgehenden 12. Jahrhundert Terzen als Schlußklänge in Mode kamen, reagierte die Zunft der Musiktheoretiker entsprechend verschnupft. Das antike Modell blieb weiterhin Ideal, obgleich es für die sich immer weiter entwickelnde Mehrstimmigkeit nicht taugte. Theorie und Praxis begannen auseinanderzuklaffen.

Noch heute arbeiten sich Musikwissenschaftler wortreich an der entstandenen Lücke ab und vermeiden beflissen exakte Festlegungen. Fachlexika verweisen gerne auf die Vielzahl möglicher Kriterien bei der Klassifizierung von Intervallen: Physik, Physiologie, Psychologie, Tradition und Gewohnheit. Die arme Quart gerät dabei zwischen alle Stühle: Aus der perfekten Konsonanz der alten Griechen wurde in der Mehrstimmigkeit eine Dissonanz, welche in die benachbarte konsonante Terz aufgelöst werden muß.

Aber was macht einen Zusammenklang zweier Töne konsonant oder dissonant? Daß es für das subjektive Erleben des Hörers objektive Gründe gibt, ist die Grundannahme der mathematischen Musiktheorie, zu deren führenden Vertretern der Züricher Mathematiker und Jazzpianist Guerino Mazzola gehört. Der Komponist Arnold Schönberg hatte einst gefordert, die sich häufig widersprechenden Regeln der einander ablösenden Musiksysteme müßten aus allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten ableitbar sein. Schon vor mehr als zwei Jahrzehnten machte sich Mazzola auf, diese Gesetzmäßigkeiten zu finden.



Guerino Mazzola *sucht den mathematischen Kern der Musik.* Foto Archiv

Dabei setzte er bei der Untersuchung des Materials an. Die zwölf Töne der Oktave teilte er in zwei Sechsergruppen. Nun gibt es rein rechnerisch 924 Möglichkeiten, solch eine Einteilung vorzunehmen. Wie Mazzola herausfand, sind sechs dieser Aufteilungsweisen, die sogenannten „starken Dichotomien", aufgrund besonderer Symmetrien mathematisch auffällig. Aber kann man das auch hören? Die gängige Anordnung der Töne im Halbtonabstand oder im Quintabstand auf einem Zwölfeck, dem sogenannten Quintenzirkel, verrät über die Besonderheit dieser sechs Einteilungen nichts.

Mazzola numerierte nun die zwölf Töne der Oktave in Halbtonabständen durch, und zwar vom Grundton 0 bis zu 11, also jenem Ton, der mit dem ersten das Intervall der großen Septim bildet. Noch ein Halbtonschritt mehr, und man wäre beim Oktavabstand, der vom menschlichen Gehör als vom Charakter her identisch empfunden wird. Ein auf Halbtonschritten aufgebautes Tonsystem wie das abendländische kennt daher im Prinzip auch nur zwölf verschiedene Intervalle, die Mazzola nun in einem speziellem Koordinatensystem untersuchte (siehe „Der Terzen-Torus"). Dabei handelt es sich um ein Gitter, dessen benachbarte Gitterpunkte zueinander im Intervallabstand einer Terz stehen – und zwar einer kleinen Terz (drei Halbtonschritte) in der einen und einer großen Terz (vier Halbtonschritte) in der anderen Richtung. Da drei große Terzen eine Oktave ausfüllen – und vier kleine Terzen ebenso eine Oktave –, krümmt sich das Gitter in beiden Richtungen in sich selbst zurück und bildet ein schwimmreifenförmiges Gebilde, den Terzen-Torus.

Auf dieser Torusfläche lassen sich jetzt Abstände zwischen Tönen berechnen. Eine bestimmte starke Dichotomie ist dann durch zwei Kennzahlen charakterisiert. Erstens durch ihren „Durchmesser", das ist die Summe der Abstände aller ihrer sechs Töne zueinander. Und zweitens durch ihre „Spannweite", die Summe der Abstände aller sechs Töne zu jenen Tönen, mit denen sie durch die erwähnte auffällige Symmetrie verbunden sind (siehe „Von Spannweiten und Durchmessern").

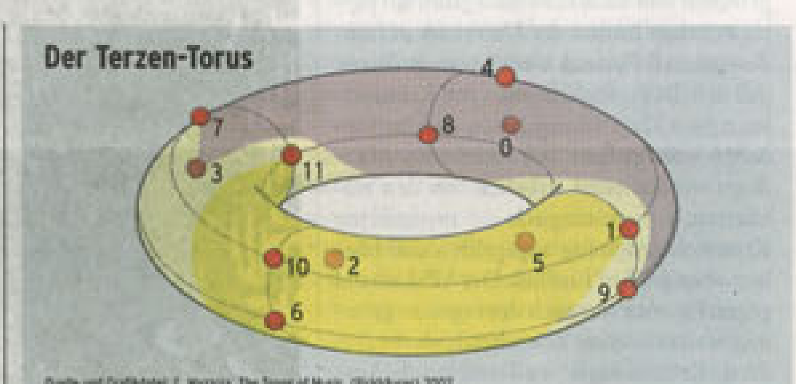
Nun gibt es unter den starken Dichotomien eine (unter den 924 möglichen ist es die mit der Nummer 82), deren Spannweite einen maximalen Wert erreicht und deren Durchmesser zugleich den minimalen Wert annimmt. In der einen Hälfte der Dichotomie Nr. 82 liegen die Töne 0, 3, 4, 7, 8 und 9. Zum Grundton 0 sind das die in Halbtonschritten gezählten Intervallabstände für Prim, kleine und große Terz, Quint, kleine und große Sexte – alles Konsonanzen! In der anderen Hälfte dagegen versammeln sich die Töne 1, 2, 5, 6, 10 und 11 (kleine und große Sekunde, Quart, Tritonus, kleine und große Septime), also die Dissonanzen, womit auch die Quart als eine solche entlarvt und das antike Paradigma auch mit den Mitteln der Musikmathematik widerlegt wäre. Zwischen den Konsonanzen und den Dissonanzen gibt es in diesem Fall eine eindeutige Beziehung, die sich in einer einfachen Formel ausdrücken läßt. In seinem drei Kilo schweren und 1335 Seiten starken Standardwerk zur mathematischen Musiktheorie, „The Topos of Music", referiert Mazzola auch die Resultate einer EEG-Studie, bei dem eine bestimmte Hirnregion exakt im Sinne der besagten Formel reagierte: Spielt man einem Probanden die zwölf Intervalle vor und beobachtet dabei die Erregungsmuster im Hippocampus, zeigen sich zwei verschiedene Mustertypen. Sie entsprechen genau den beiden Intervall-Sechsergruppen der Dichotomie Nr. 82.

Demnach gäbe es also doch eine mathematische Lösung des Konsonanz-Dissonanz-Problems, mit der sich die Entwicklung von der Musik des Mittelalters zur Wiener Klassik als langwierige Emanzipation von einem historischen Irrtum begreifen läßt. Als weiterer Beleg dafür könnte gelten, daß in der Praxis auch jene starke Dichotomie

Nach 1335 Seiten harter Lektüre steht fest: Wiener Klassik ist die beste aller musikalischen Welten.

eine besondere Bedeutung besitzt, welche zur Nr. 82 entgegengesetzte Eigenschaften besitzt: Nr. 64 hat eine minimale Spannweite und einen maximalen Durchmesser. Sie enthält in ihrer einen Hälfte die Töne 2, 4, 5, 7, 9 und 11, was exakt den Tönen zwei bis sieben (d, e, f, g, a, h) einer Dur-Tonleiter auf dem Ton c entspricht. Offenbar hat sich die abendländische Musikgeschichte Schritt für Schritt auf diese zwei Dichotomien mit den exklusivsten Eigenschaften hinentwickelt. In der Wiener Klassik wäre damit die beste aller mathematisch darstellbaren Welten verwirklicht. Man sieht es ihr bloß nicht direkt an, denn die zugrundeliegenden Symmetrien zeigen sich nicht an der Oberfläche.

Der Terzen-Torus



Die zwölf Töne einer Oktave *sind hier als Gitterpunkte (rote Scheibchen) auf einem sogenannten Terzen-Torus dargestellt. Betrachtet man jeden davon relativ zum Grundton 0, dann erhält man zwölf mögliche Intervalle. Unter allen Möglichkeiten, diese zwölf Intervalle in zwei Gruppen zu unterteilen, gibt es sechs, bei denen sich besondere Symmetrien zwischen den Teilgruppen feststellen lassen. Eine dieser sechs Möglichkeiten teilt die Intervalle genau in dissonante (gelb) und konsonante (violett) ein.*

Die mathematische Musiktheorie gibt Forschern, Komponisten und Interpreten nun Instrumente an die Hand, um grundlegende musikalische Phänomene zu verstehen. Die Bereitschaft, diese Instrumente auch zu nutzen, hält sich allerdings nicht nur in Mazzolas Heimat in überschaubaren Grenzen. Natürlich wird an musikwissenschaftlichen Instituten in aller Welt mit vielerlei Hard- und Software experimentiert, wobei auch aktuelle Forschungsergebnisse mit einfließen. Aber es mangelt immer noch an einer verbindlichen Klärung von grundlegenden Begriffen wie „Konsonanz" oder „Tonalität". Insofern zielen die Methoden der mathematischen Musiktheorie auf den neuralgischen Punkt neuerer und zeitgenössischer Musik. Symptomatisch ist das Bedürfnis moderner Komponisten, ihren Zuhörern langatmig jene Inhalte ihrer Kompositionen zu erklären, welche sich dem Ohr partout nicht mitteilen mögen. Offenbar führt hier die Suche nach Neuem zu Strukturen, die nicht auditiv nachvollziehbar sind.

Neue Wege könnten vielleicht die vier verbleibenden starken Dichotomien weisen, die zwar die von Mazzola entdeckten Symmetrien aufweisen, aber bei der Evolution der abendländischen Tonalität und Mehrstimmigkeit bislang keine Rolle gespielt haben. Lassen sich mit diesen unverbrauchten Dichotomien auch so etwas wie eine sinnlich zugängliche Harmonie und ein ebensolcher Kontrapunkt erzeugen? Aktuelle Berechnungen zeigen, daß dies zwar möglich, gegenüber den historisch bevorzugten Modellen jedoch mit Einschränkungen verbunden ist. Dies allein muß allerdings kein Nachteil sein. Eine pentatonische Tonauswahl etwa bezieht ihren spezifischen Reiz gerade aus ihrer Einschränkung auf nur fünf von zwölf möglichen Tönen.

Derzeit entwickeln Gérard Milmeister und Julien Junod an der Universität Zürich eine Software, die auf der Basis der alternativen Dichotomien komponiert. Vielleicht steht hier bald ein Instrument zur Verfügung, um mit kognitiv relevanten Tonstrukturen zu arbeiten, ohne auf die Schemata traditioneller Tonalität zurückgreifen zu müssen. Die „Neue Musik" könnte so den Ruch des Unverständlichen, am Reißbrett Konstruierten verlieren, der ihr spätestens seit Arnold Schönbergs strikter Zwölftonmusik anhaftet.

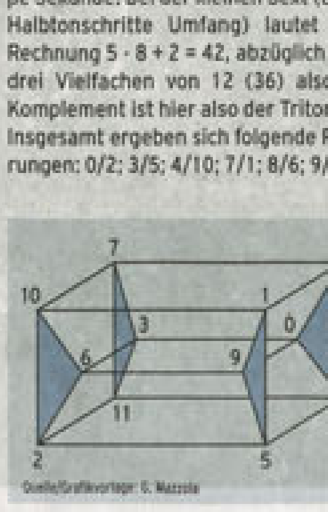
Der Musikmathematiker Guerino Mazzola ist sowieso keiner, der sich durch zuviel Theorie an der Praxis hindern ließe. „So, häsch wieder Unzucht tribe!" soll ihm einst einer seiner Züricher Professoren nach einer seiner Jazz-Sessions zugezischt haben. Zum Januar 2007 folgt Mazzola einem Ruf an die Universität von Minnesota, wo man sich auf Jazz-Einlagen während der Vorlesungen freuen darf. Wieder einmal läßt das alte Europa einen seiner fähigsten Köpfe gedankenlos ziehen.

Literatur: Guerino Mazzola, „The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory and Performance", Birkhäuser, 2002.

Von „Spannweiten" und „Durchmessern" im Reich der Intervalle

Guerino Mazzolas Theorie arbeitet mit sogenannten Dichotomien, also Aufteilungen der zwölf Intervalle in zwei Sechsergruppen. Jede solche Dichotomie besitzt zwei Kennzahlen: ihren „Durchmesser" und ihre „Spannweite". Um zu verstehen, was damit gemeint ist, zieht man am besten die kreisförmigen Gitterlinien des oben abgebildeten Terzen-Torus in Gedanken zu Strecken aus, so daß untenstehender „taillierter Würfel" entsteht.

Nun hat jeder Ton einer Sechsergruppe ein sogenanntes Komplement, also einen Partner in der jeweils anderen Sechsergruppe, mit dem er mathematisch verknüpft ist. Im Fall der Dichotomie Nr. 82 existiert eine einfache Formel: $d = 5 \cdot k + 2$. Multipliziert man also die Nummer k eines Tons mit konsonantem Intervallabstand zum Grundton mit 5 und addiert zum Ergebnis eine 2, erhält man die Nummer d der komplementären Dissonanz. Da Töne im Oktavabstand als identisch angesehen werden können, müssen Vielfache von 12 gegebenenfalls abgezogen werden. Das Komplement zur Prim errechnet sich als $5 \cdot 0 + 2 = 2$, ist also die große Sekunde. Bei der kleinen Sext (acht Halbtonschritte Umfang) lautet die Rechnung $5 \cdot 8 + 2 = 42$, abzüglich der drei Vielfachen von 12 (36) also 6. Komplement ist hier also der Tritonus. Insgesamt ergeben sich folgende Paarungen: 0/2; 3/5; 4/10; 7/1; 8/6; 9/11.



Wenn man nun von der 0 entlang der Gitterlinien zur 2 wandert – seinem dissonanten Komplement –, braucht man auf dem kürzesten Weg drei Schritte. Von der 3 zur 5 sind es ebenfalls drei, von der 4 zur 10 zwei und so weiter. Die Summe der Schritte zur Verbindung aller sechs Tonpaare definiert dann die Spannweite. Wer alles richtig gemacht hat, erhält für die Komplementpaare der Dichotomie Nr. 82 als Resultat die Zahl 16.

Zur Berechnung des Durchmessers einer Sechsergruppe wird analog verfahren. Man bildet beispielsweise zunächst die Summe der Schritte, um von 0 zu den fünf anderen Tönen (3, 4, 7, 8, 9) zu gelangen: sie beträgt sechs. Hinzu kommt die Summe der Schritte von der 3 zu den verbleibenden vier Tönen (4, 7, 8, 9) – sie ist sieben. So geht es weiter. Wer richtig zählt, kommt auf insgesamt 24 Schritte. *lkt.*